131 développements pour l'oral – Lesesvre

Théorème de Dixon

103 160
104 161
106 190

Théorème : (de Dixon) Soit G groupe non-abélien fini et $p(G)$ la probabilité pour que deux éléments de G tirés uniformément et indépendamment, commutent.

Alors : $p(G) \leq \frac{5}{8}$

Preuve :

> L'idée pour ce développement est de faire intervenir le centre de G : $Z(G)$ et ses centralisateurs pour exploiter le caractère non-abélien de G.

① Montrons que $[G:Z(G)] \geq 4$

Comme G n'est pas abélien, $\exists x \in G \setminus$

$C_x := \{g \in G \mid gx = xg\} \neq G$. Soit un tel $x \in G$

et alors $[G:C_x] \geq 2$

Par ailleurs, $Z(G) < G$ et $Z(G) \neq C_x$ (car $x \notin Z(G)$)

et alors : $[C_x : Z(G)] \geq 2$.

Ainsi, $[G:Z(G)] = [G:C_x][C_x:Z(G)] \geq 4$.

② Montrons l'inégalité $p(G) \leq \frac{5}{8}$

$$p(G) = \frac{1}{|G|^2} \times |\{(x;y) \in G \mid xy = yx\}|$$

$$= \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} |\{y \in G \mid xy = yx\}|$$

$$= \frac{1}{|G|^2} \sum_{x \in G} |C_x|$$

Or : $x \in \cancel{G}\ Z(G)$ ssi $C_x = G$ (par définition)

Ainsi, si $x \notin Z(G)$, alors $[G:C_x] \geq 2$ et alors :

$|C_x| \leq \frac{1}{2}|G|$

$$= \frac{1}{|G|^2} \times \left[\sum_{x \in Z(G)} |C_x| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} |C_x|\right]$$

$$\leq \frac{1}{|G|^2} \times \left[\sum_{x \in Z(G)} |G| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} \frac{1}{2}|G|\right]$$

$$\leq \frac{1}{|G|^2} \times \left[\frac{|G|}{4}|G| + \left(|G| - \frac{|G|}{4}\right) \times \frac{|G|}{2}\right]$$

$$\leq \frac{5}{8}$$

Application : Soit D_8 groupe diédral à 8 éléments

Alors : $p(D_8) = \frac{5}{8}$

Preuve :

① Déterminons les couples de D_8 qui commutent.

- Les rotations commutent entre elles
- Soit s réflexion d'axe Δ et s' d'axe Δ'.

Alors $s \circ s'$ est une isométrie directe de D_8 et donc une rotation et son angle est le double de $(\Delta';\Delta)$ modulo 2π.

Comme $s' \circ s = (s \circ s')^{-1}$ (puisque s et s' sont des involutions), $s' \circ s$ est la rotation d'angle le double de $(\Delta;\Delta')$ modulo 2π.

Ainsi, s et s' commutent ssi $2(\Delta;\Delta') \equiv 2(\Delta';\Delta)\ [2\pi]$

ssi $4(\Delta;\Delta') \equiv 0\ [2\pi]$

ssi $(\Delta;\Delta') \equiv 0\ [\frac{\pi}{2}]$

Une réflexion $s \in D_8$ d'axe Δ commute avec elle même et avec la réflexion d'axe $\Delta^{\perp}$ mais pas avec les autres !

- Soit $s \in D_8$ réflexion d'axe Δ et $r \in D_8$ rotation.

L'isométrie $r \circ s \circ r^{-1} \in D_8$ est de déterminant -1, c'est donc une réflexion.

Elle préserve la droite $r(\Delta)$, c'est son axe.

▲ Si s et r commutent, alors $r \circ s \circ r^{-1} = s$ donc $r(\Delta) = \Delta$ ie. $r = id$ ou $r = -id$

▲ Réciproquement, si $r = id$ ou $r = -id$, alors : r commute avec toutes les réflexions.

② Comptons

Il y a 64 couples dans D_8^2. Décomptons ceux qui commutent selon le premier $(x;y)$

- id et $-id$ commutent avec tout le monde d'où : $2 \times 8 = \boxed{16}$ couples $(id;y)$; $(-id;y)$.
- Les deux autres rotations commutent avec les rotations d'où : $2 \times 4 = \boxed{8}$ couples $(r_1;r_2)$ $r_1 \neq \pm id$
- Les quatre réflexions commutent chacune avec deux réflexions et deux rotations d'où : $4 \times 4 = \boxed{16}$ couples $(s;y)$

Ainsi, $p(G) = \frac{16+8+16}{64} = \frac{5}{8}$

Proposition : Soit G groupe tel que $G/_{Z(G)}$ abélien

Alors : G est abélien

Preuve :

Soit $\pi : G \longrightarrow G/_{Z(G)}$ la surjection canonique.

$\forall g, h \in G$, $\pi(g)\pi(h) = \pi(h)\pi(g)$

i.e. $\pi(gh) = \pi(hg)$

i.e. $\pi(gh) \circ \pi(hg)^{-1} = 1$

i.e. $\pi(gh) \cdot \pi\left[(hg)^{-1}\right] = 1$

i.e. $\pi(ghg^{-1}h^{-1}) = 1$

Ainsi, $gh = hg$.

Proposition : Soit $\mathbb{H}_8$ le groupe des quaternions.

Alors : $p(\mathbb{H}_8) = \frac{5}{8}$

Preuve :

Comptons. Il y a 64 couples dans $\mathbb{H}_8^2$.

- ± 1 commutent avec tout le monde d'où : $2 \times 8 = 16$ couples
- $\pm i$ commutent avec ± 1 et $\pm i$ uniquement d'où : $2 \times 4 = 8$ couples
- $\pm j$ commutent avec ± 1 et $\pm j$ uniquement d'où : $2 \times 4 = 8$ couples
- $\pm k$ commutent avec ± 1 et $\pm k$ uniquement d'où : $2 \times 4 = 8$ couples

Ainsi, $p(\mathbb{H}_8) = \dfrac{16 + 8 + 8 + 8}{64} = \dfrac{5}{8}$

Temps :
13' 58''
13' 49''